# NICOLAI FATII DUILLIERII,

R. S. S.

# LINEÆ BREVISSIMI DESCENSUS INVESTIGATIO GEOMETRICA DUPLEX.

CUI ADDITA EST

# INVESTIGATIO GEOMETRICA SOLIDI ROTUNDI,

IN QUOD

MINIMA FIAT

RESISTENTIA.

*LONDINI:*

Typis *R. Everingham*: Proſtant apud *Johannem Taylor*, ad Inſigne *Navis*, in *Cæmeterio Divi Pauli*. M DC XC IX.

# Imprimatur

Liber cui Titulus, Nicolai Fatii Duillierii Lineæ Breviſſimi Deſcenſus Inveſtigatio Geometrica duplex, &c.

*J. Hoskyns*, V. P. R. S.

2506 : 11

# NICOLAI FATII DUILLIERII,

## R. S. S.

# LINEÆ BREVISSIMI DESCENSUS INVESTIGATIO GEOMETRICA DUPLEX.

* "CURVAM Celerrimi Deſcenſus, a ſe prius "inventam, Geometris intra ſex Menſes "perquirendam, publico Programmate, pro- "poſuit Cl. Dn. Jo. Bernoullius: ſcriptiſ- "que Litteris Cl. Leibnitium rogavit, ut aliquid tem- "poris, huic Problemati ſolvendo, impenderet.

* *Vide Acta Lipſienſia Menſis Maij 1697.*

"Leibnitius ipſe, velut Miſſione dudum impetrata, "potuiſſet quidem (verba ſunt Leibnitii) hoc labore "ſuperſedere; tamen, Problematis pulchritudine ca- "ptus, mox ipſum tentando, voti fœliciter compos fa- "ctus eſt.

"Sex præſtitutis Menſibus elapſis, nullo alio inven- "tam ſibi Solutionem ſignificante, Leibnitio Bernoul- "lioque *placuit, ut, Programmate novo, Terminus ad ſex ali- "os Menſes prorogaretur; tametſi prævideret EOS IPSOS, "quos Solutionem tandem aſſecutos cognoverunt, ad eam eſſe "perventuros.* Et ſane, inquit Leibnitius, notatu non "indignum eſt, EOS SOLOS ſolviſſe hoc Problema, "quos SOLVERE POSSE conjeceram. Erant hi, "præter præfatum Bernoullium, Cl. ipſius Frater; "Marchio Hoſpitalius; Hugenius, ſi vixiſſet; Hud- "denius, niſi hæc Studia dudum intermiſiſſet; Newto- "nus, ſi operam hanc in ſe recepiſſet.

# Imprimatur

Liber cui Titulus, Nicolai Fatii Duillierii Lineæ Breviſſimi Deſcenſus Inveſtigatio Geometrica duplex, &c.

*J. Hoskyns*, V. P. R. S.

2506:11

# NICOLAI FATII DUILLIERII,

## R. S. S.

# LINEÆ BREVISSIMI DESCENSUS

## INVESTIGATIO GEOMETRICA

## DUPLEX.

* "CURVAM Celerrimi Deſcenſus, a ſe prius "inventam, Geometris intra ſex Menſes "perquirendam, publico Programmate, pro- "poſuit Cl. Dn. Jo. Bernoullius: ſcriptiſ- "que Litteris Cl. Leibnitium rogavit, ut aliquid tem- "poris, huic Problemati ſolvendo, impenderet.

* *Vide Acta Lipſienſia Menſis Maij* 1697.

"Leibnitius ipſe, velut Miſſione dudum impetrata, "potuiſſet quidem (verba ſunt Leibnitii) hoc labore "ſuperſedere; tamen, Problematis pulchritudine ca- "ptus, mox ipſum tentando, voti fœliciter compos fa- "ctus eſt.

"Sex præſtitutis Menſibus elapſis, nullo alio inven- "tam ſibi Solutionem ſignificante, Leibnitio Bernoul- "lioque *placuit, ut, Programmate novo, Terminus ad ſex ali- "os Menſes prorogaretur; tametſi præviderent EOS IPSOS, "quos Solutionem tandem aſſecutos cognoverunt, ad eam eſſe "perventuros.* Et ſane, inquit Leibnitius, notatu non "indignum eſt, EOS SOLOS ſolviſſe hoc Problema, "quos SOLVERE POSSE conjeceram. Erant hi, "præter præfatum Bernoullium, Cl. ipſius Frater; "Marchio Hoſpitalius; Hugenius, ſi vixiſſet; Hud- "denius, niſi hæc Studia dudum intermiſiſſet; Newto- "nus, ſi operam hanc in ſe recepiſſet.

Newtonus quidem, Programmate ad ipſum miſſo, provocatus, Solutionem ſuam dedit ; ægre ferens, tale quid ab ipſo requiri, poſt datam Solutionem difficilioris Problematis, de inveniendo Solido rotundo, longitudinis ac latitudinis datæ, cujus Reſiſtentia, dum ſecundum Axis ſui plagam progrederetur, foret omnium minima. Quod eo magis potuit Vir Summus, quo nemo aut diutius, aut pari jure, pleniſſimam, ut Leibnitii verbis utar, miſſionem eſſet emeritus.

" Cl. Jac. Bernoullius, quanquam Fratris provoca-
" tione ſe non teneri exiſtimaret, tamen, ſuperacce-
" dente humaniſſima Leibnitii invitatione, ejus Litteris
" ac ſollicitatione motus, Problema fœliciter aggreſſus
" eſt, quod alias intactum reliquiſſet.

" Illuſtriſſimus Marchio Hoſpitalius, cum difficile
" admodum prima fronte ipſi videretur Problema, nec
" firma ſatis uteretur valetudine, ab illo abſtinere pri-
" mum decreverat. Deſidem, ac operis aſperitate de-
" territum, erexit Programma Bernoullianum, quo Ge-
" ometras, ad hujus Problematis Solutionem, iterum
" invitabat. Neque ſpem fefellit, imo ſuperavit, e-
" ventus.

Nos vero, ſi qua Invitatione, ſi digni viſi fuiſſemus Litteris, quamvis inter tot egregios Candidatos innominati, nec adhuc in eorum numerum relati, quos SOLOS tanto Problemati pares Cl. Leibnitius pronunciet, utique noſtras dudum exhibuiſſemus Solutiones. Nec enim cauſa erat, cur antiquum morem noſtrum, Problemata omnia in Vulgus jacta prætereundi, mutaremus. Sed, cum videamus Silentium noſtrum in nos ipſos verti, quod hac in re præſtitimus exponemus, quantum fieri poterit breviſſime.

Liceat autem idem omnino ſcriptum edere, quod * nuper Chartæ commiſimus, ante viſa a nobis Anni 1697 Acta, quæ per aliquot Menſes fruſtra, inter Londinenſes Bibliopolas, quæſivimus. Illa enim quæ, in Procemio, mutari oporteret, ubi duos tantum agnoſcimus

* *Menſe Julio* 1698.

noſcimus Geometras, qui Problematis Solutionem invenerint, facile ex jam præmiſſis ſupplebit Lector. Neque vero immerito ſuſpicabar, iſta proponendorum Problematum luxurie, Principatum quendam, inter Mathematicos, affectari; quicquid in contrarium regeratur: ſiquidem quicunque Solutiones nullas hujus Problematis dederunt, impares ipſis inveniendis ultro, ſolennibus Actis, promulgantur.

---

## *Lineæ Breviſſimi Deſcenſus Inveſtigatio Geometrica Prior.*

ACcepimus Præclariſſimum Geometram, a quo propoſitum eſt Problema, de invenienda Linea Breviſſimi Deſcenſus, a dato Puncto ad Punctum aliud datum, Amico ſcripſiſſe, Solutionem ejus Problematis, quam in Tranſactionibus Philoſophicis viderunt Eruditi, Newtonum Auctorem procul dubio agnoſcere. Ejuſmodi Problemata, quamvis a me non ſemel ſoluta, verbi gratia circa Catenariam, Velariam, harumque Linearum identitatem, Curvam Deſcenſus Æquabilis &c, magnopere ſemper averſatus ſum; neque Solutiones meas publicis ſcriptis unquam dignatus ſum exponere. Quid enim aliud, proponendis ejuſmodi Problematis, affectari videretur, niſi hic mos inter cordatos etiam invaluiſſet, præter exiſtimationis ſupremam dignitatem? Quam modeſtioribus facile præripiant, quicunque, ſibi ipſis inventa difficiliora Theoremata, ſub Problematum forma, Mathematicis proponant. Quaſi vero manus darent, quicunque, in arenam e veſtigio deſcendere nolentes, intra præfitutum tempus, Problema non ſolviſſent. Problema, inquam, cui ſolvendo Auctor opportunum otium nactus fuerit; cui tractando multos Annos forſan inſudaverit; quod elegerit ipſe; quod amaverit, ac ardentiori ſtudio proſecutus fuerit; cui enodando viam facilem, cognatis ſtudiis

diis, ſibi paraverit; quod denique ignotum pluribus Eruditis, per Annos aut Menſes integros, in Actis quibuſdam extraneis, facile deliteſcat; aut, ſi ad ipſos etiam perveniat, non ita paratos corripiat, ad propria ſtudia deſerenda, ut quam ocyſſime ad ſublimes, ac difficiles alienaſque Meditationes deflectant. Quo etiam dato, etſi Calculus, ut ſæpe fit, pro votis ſuccedat, certe non omnes eadem, id in Publicum promulgandi, premuntur libidine. Sed id jam agemus, quod ſemel liceat invito, ut oſtendamus rem Mathematicam non in tantis anguſtiis etiamnum verſari, ut, ad ejuſmodi Problemata, via uni tantum Mathematico, præter Auctorem, pateat. Quem tamen plurimum veneramur, atque ſumme laudatum volumus, ac præſertim ubi eximias Meditationes in publicum ſpargit, non evocatis quibus vel otium, vel ſtudia non ab aliis obtruſa, magis arrideant. Sed ad rem.

*Fig.* I. Ab Altitudine, in qua conſtituta eſt Linea horizontalis LH, profectum Corpus grave eo devenit, continue accelerato a quiete motu, ut, per puncta proxima poſitione data A, B, jam jam tranſiturum ſit. Quæritur Radius Arcus infinite parvi A G B, in quo deſcribendo Corpus minimum temporis impendat.

Demittatur Horizonti perpendicularis L *a e*, occurrens Lineis A *a*, B *e*, Lineæ L H parallelis, in punctis *a* & *e*. Vertice L, Axe L *a e*, Parametro quovis *a*, deſcribatur Parabola L P Q: Eruntque Corporis ab L H profecti velocitates, in quavis Altitudine A vel B, ut Ordinatæ in Parabola e regione poſitæ *a* P, *e* Q. Si jam intelligas Axem L *a e* in infinitas Lineolas æquales dividi, longe minores, atque etiam in infinitum minores, quam ſit Linea *a e*, erit Tempus, quo quælibet ejuſmodi Lineola deſcribitur, reciproce ut Velocitas. Deſcribatur Curva *d c n*, Lineis *a* P, *e* Q occurrens in *c* & *d*, in qua Ordinatæ *a c*, *e d* ſint reciproce ut Velocitates *a* P, *e* Q. Ergo Lineæ *a c*, *e d* erunt ut Tempora, quibus Lineolæ æquales deſcribuntur, Corpore verſante in *a* & *e*. Et, cum hoc ubique obtineat, Tempus quo percurritur *a e*, erit ut Spatium *c a e d*.

A

A Punctis E & A erigantur, ad Figuræ Planum Perpendiculares, E D, A C, Lineis *e d*, *a c* æquales. Et a puncto G, in Arcu A G E medio, erigatur itidem G K A, correſpondenti Ordinatæ *g l* æqualis: Ductaque, per Puncta D, A, C, Curva regulari D A C, erit Area D A C A G E D æqualis Tempori, quo Corpus deſcribet Arcum A G E. Oportet autem Radium Arcus A G E ita determinari, ut Area illa ſit quam minima.

Concipe Lineam D E, Lineæ A E parallelam & æqualem: Arcumque D K B, Arcui E G A itidem parallelum, aut ſi mavis ſupereminentem, & æqualem. Tum eundem Arcum D K B, adeoque totam Figuram D K B C A D, intellige in directum extendi; junctaque nova Linea D C, producatur K A ad O, Punctum in nova Linea D C medium.

Erit igitur Area D A C A G E D æqualis Arcui A E, ducto in Lineam E D; plus Arcui A E, ducto in $\frac{1}{4}$ B C; minus Arcu A E, ducto in $\frac{3}{4}$ A O. Quam Summam oportet fieri Minimo æqualem. Atque huc uſque, protinus viſo Problemate, Solutionem perduxi, de ulteriori Calculo, tunc temporis, non ſollicitus. Sed jam Calculum ipſum, ab Amico rogati, abſolvamus.

Ducatur *d b* ad *a c* perpendicularis: & a Puncto F, in Linea A E medio, ducatur ad H L parellela F V *u i m t*, occurrens Lineæ *a e*, in *u*; Curvæ *d c n*, in Puncto *m*; Subtenſæ *d c*, in ejus Puncto medio *t*: Sintque G V, *l i* ad F *m* perpendiculares; & compleatur Rectangulum *l i t o*. Eritque *l o* æqualis A O; atque etiam æqualis *i m* plus *m t*.

Itaque Arcus A E, ductus in Lineam E D; plus Arcus A E, ductus in $\frac{1}{4}$ B C; minus Arcu A E, ducto in $\frac{3}{4}$ *m i*; minus Arcu A E, ducto in $\frac{1}{4}$ *m t*, æquantur Minimo.

Jam, ut ſuperfluus Calculus vitetur, ex hac Summa primo tollenda ſunt Producta, quæ data ſunt. Deinde, ex Productis reliquis, ea rurſus tollenda, quæ cæteris infinite minora ſunt.

Sit

Sit Linea A F $= p$; ſitque Radius Arcus A G E $= n$: Hinc ſequitur Arcum infinite parvum A E æquari $2p + \frac{p^3}{3nn}$; eruto ſcilicet valore Arcus infinite parvi, ex ejus Sinu dato.

Igitur $2p \times$ E D $+ \frac{p^3}{3nn} \times$ E D; $+ 2p \times \frac{1}{2}$ B C $+ \frac{p^3}{3nn} \times \frac{1}{2}$ B C; $- 2p \times \frac{1}{3} mi$; $- \frac{p^3}{3nn} \times \frac{1}{3} mi$; $- 2p \times \frac{1}{3} mt - \frac{p^3}{3nn} \times \frac{1}{3} mt$, æquantur Minimo.

Jam vero data ſunt, ex hypotheſi, Producta Aſteriſco * notata; patetque proinde Inventione Lineolæ $mt$, ſeu Curvitatis Lineolæ $cmd$, opus non fore. Et, inter reliqua Producta, ea, quæ ſigno ‡ notata ſunt, cæteris, nempe primo inter ipſa, ſunt infinite minora.

Remanent itaque Termini, $\frac{p^3}{3nn} \times$ E D $- 2p \times \frac{1}{3} mi$, æquandi Minimo. Inter quos, ſi aliqui remanſiſſent, quos oportuiſſet deletos, nullus error tamen inde pertimeſcendus eſſet, cum iſta Terminorum Deletio, ad brevitatem duntaxat Calculi, comparata ſit: ita ut, ſi Termini remaneant, qui potuiſſent deleri, tandem ſuo loco inveniatur, ipſos illos Terminos delendos eſſe.

Itaque Denominationes Linearum E D, $mi$, jam inveniendæ ſunt.

Sit Abſciſſa L $e = x$; Fluxio $ea = \dot{x}$; Ordinata e Q erit $= \sqrt{ax}$. Ordinata $ed$ vel E D ponatur $= \frac{aa}{\sqrt{4ax}} = z$. Qua ultima Æquatione, per Methodum Fluxionum, tractata, invenietur Fluxionis $bc$ Longitudo $= \dot{x}\sqrt{\frac{a^3}{4x^3}}$.

Linea F G æquatur $\frac{pp}{2n}$. Jam, quoniam data ſunt Poſitione Puncta A, E, ducta A R ad E Q perpendiculari, dabitur ratio Laterum A E, E R. Sit ea quæ $p$ ad $s$.

Igitur fiat ut $p$ ad $s$ ſic F G, ſeu $\frac{pp}{2n}$ ad $\frac{sp}{2n}$; quæ Quantitas æquatur Lineæ G V, vel $gu$, vel $li$.

Rurſus ut $db$ ad $bc$ ita eſt $li$ ad $im$; quæ proinde æquatur $\frac{sp}{2n}\sqrt{\frac{a^3}{4x^3}}$.

Ergo, ſubſtitutis valoribus ipſarum E D & $mi$, oportet $\frac{p^3}{3nn} \times \frac{aa}{\sqrt{4ax}} - 2p \times \frac{sp}{3n}\sqrt{\frac{a^3}{4x^3}}$ æquari Minimo.

Itaque

Itaque & $\frac{pa}{uu\sqrt{ax}} - \frac{2s}{u}\sqrt{\frac{a}{4x^3}}$ æquatur Minimo. Sit hoc $\frac{\beta}{uu} - \frac{\gamma}{u}$. Erit igitur $-\frac{2\beta\dot{u}}{u^3} + \frac{\gamma\dot{u}}{uu} = 0$; id est $\gamma u = 2\beta$. Ergo $u = \frac{2\beta}{\gamma} = \frac{2pa}{\sqrt{ax}}$ applicato ad $2s\sqrt{\frac{a}{4x^3}} = \frac{2px}{s}$. Ut igitur $s$ ad $p$, id est ut E R ad E A, ita est $2x$ ad $u$; quæ proinde æquatur 2 G H.

Itaque quantum Corpus grave, per Lineam Breviſſimi Deſcenſus cadens, a Linea horizontali L H, a qua cadendi initium fecit, remotum eſt; tantum præciſe Centrum Curvitatis Lineæ Breviſſimi Deſcenſus attollitur, ſupra eandem Horizontalem L H. Quæ notiſſima eſt Cycloïdis Proprietas. Hujus Vertex deorſum ſpectat; Baſis in ipſa L H conſtituta eſt; Circulus generans Baſin L H in H tangit, & tranſit per Punctum G. Vide Hugenii Horologium Oſcillatorium, Librumque in eo de Curvarum Evolutione. Atque ex his ipſiſſima fluit Conſtructio, quæ habetur in Tranſactionibus.

Si quis etiamnum eatenus imperfectam reputet noſtram Solutionem, quatenus ignorari poterat hanc fuiſſe Cycloïdis Proprietatem, ſciat facilem ab ea Regreſſum mihi, pluribus modis, ad alias notas Cycloïdis Proprietates, patuiſſe. Demonſtravi ſiquidem, in Curva noſtra, Fluxionem Ordinatæ, ad Baſin L H parallelæ, eſſe Summam Fluxionum Arcus, in Circulo dato, Baſin L H contingente, ejuſque Sinus; ſumpto Arcus initio vel a ſummo vel ab infimo Circuli Puncto. Quæ itidem trita eſt Cycloïdis Proprietas. Rurſus demonſtravi Curvam noſtram deſcribi motu Puncti, ſignati in Circumferentia dati Circuli, ſuper Baſin L H, more Rotæ, diſcurrentis; quæ primaria eſt Cycloïdis, apud Geometras, Generatio.

Calculum noſtrum aliquanto brevius inſtitui poſſe conſtat; neque tanta opus fuiſſe ἀκριβείᾳ. Sed cur aliis invideamus pleniorem, egregii Problematis, Tractationem, qua, minori cum moleſtia, ad eadem præſtanda, evadant promptiores. Nec enim, nullo Mathematici Lectoris commodo, ſcribere nobis propoſitum eſt.

Methodum, quam ſecuti ſumus, clarum eſt non eſſe Lineis I P Q, *n c d* propriam ; ſed locum etiam habere, ſuppoſita alia atque alia Gravitatis, ac Velocitatis cadentium Corporum, Lege.

Placet hic unam aut alteram Cycloïdis Proprietatem, a nobis repertam, addere. Anno 1690. occaſione horum Cl. Hugenii verborum, Horol. Oſcil. p. 11. *Quæ Proprietas inſignis neſcio an alii, præter Cycloïdem, Lineæ data ſit, ut ſe ipſam, ſui Evolutione, deſcribat* ; hocce Problema nobis directe ſolvendum propoſuimus ; Invenire Curvam, quæ ſe ipſam, ſui Evolutione, generet. Duplex autem eſt Problematis Caſus. Vel enim, Curvitatis Evolutæ Radio creſcente, decreſcit Radius Curvæ, ex Evolutione deſcriptæ ; & pariter, illo decreſcente, creſcit. Vel, Curvitatis Evolutæ Radio creſcente, creſcit & Radius Curvæ, ex Evolutione deſcriptæ ; pariterque, illo decreſcente, decreſcit. Priorem Caſum plene tunc ſolvimus ; talemque Lineam Solam eſſe Cycloïdem comperimus : quam Diſquiſitionem etiam cum ipſo Hugenio communicavi. Alterum Caſum non attigi ; cujus tamen Solutio, ſi augurari liceat, cum priori videatur eſſe facilior, inquirentem diu latere non poterit.

Intellige Corpus ſphæricum filo appenſum, cujus Centrum in Cycloïde, Penduli more, moveatur, cadendo ab altero Cycloïdis extremo, & ad alterum uſque extremum, Vibratione omnium maxima, procedendo. Movebitur Corpus illud, uniformi cum motu, circa Axem Horizonti parallelum : ac, toto hoc temporis ſpatio, dimidiam Rotationem, circa ipſum, conficiet. Fili autem Interſectio, cum horizontali Cycloïdis Baſi, motu æquabili, in hac Horizontali, uſque procedet. Sed eadem Interſectio, in Filo, ita movebitur, ut ejus Velocitas, a Centro penduli Corporis recedendo, vel ad ipſum accedendo, ſit ſemper proportionalis Sinui Complementi Anguli, quem Filum cum Horizonte conſtituit. Denique Fili Tenſio ex Vi Centrifuga, tum huic æqualis ubique Tenſio ex Gravitate, erit ut Fili ipſius Longitudo. *Lineæ*

## *Lineæ Breviſſimi Deſcenſus Inveſtigatio Geometrica Poſterior.*

POſitis quæ, in præcedenti Solutione, dicta ſunt, ducantur Rectæ A G, G E. Ergo, cum ſit F G = $\frac{p}{2n}$, ſi, Centro A, Radio A F ($p$) deſcriptus intelligatur Circulus, invenietur A G minus A F æqualis $\frac{p}{8nn}$; ac proinde A G ſeu E G = $p + \frac{pp}{8nn}$.

Jam ponatur Velocitas Corporis cadentis, in Altitudine A conſtituti, uniformiter perdurare, ad Altitudinem uſque G; ubi, ſubito Incremento adepto, iterum Velocitas Corporis cadentis, in Altitudine G conſtituti, uniformiter perduret, ad Punctum uſque E.

Moveatur autem Corpus cadens, non per Arcum A G E, ſed per Rectas, inter ſe æquales, A G, G E: Quæritur Punctum G, cujus talis ſit Poſitio, ut Tempus, per Rectas A G, G E, ſit omnium minimum.

Ergo $[p + \frac{pp}{8nn}] \times ac$; $+ [p + \frac{pp}{8nn}] \times [um - mi]$ æquatur Minimo.

Sit L $a = x$; erit $ac = \frac{aa}{\sqrt{ax}}$. Sit $au$ æqualis Fluxioni $\dot{x}$, & Æquatione $z = \frac{aa}{\sqrt{ax}}$ per Methodum Fluxionum tractata, prodibit $\frac{z\dot{x}}{2x} = -\dot{z}$: ac proinde, ducta $mh$ ad $ac$ perpendiculari, Fluxionis $ch$ ſeu $-z$ Longitudo erit $\frac{x}{2x}\sqrt{\frac{aa}{x}}$. Hinc $ah$ ſeu $um = \frac{aa}{\sqrt{ax}} - \frac{x}{2x}\sqrt{\frac{aa}{x}}$.

Jam ut $p$ ad $s$ ita eſt F G $(\frac{pp}{2n})$ ad G V ſeu $li$; quæ proinde æquatur $\frac{ps}{2n}$.

Item ut $\dot{x}$ ad $-\dot{z}$ ita $li$ ad $im$; id eſt ut $2x$ ad $z$ ſeu $\frac{aa}{\sqrt{ax}}$ ita $\frac{ps}{2n}$ ad $\frac{aaps}{4nx\sqrt{ax}}$; quod æquatur ipſi $im$.

Itaque, ſubſtitutis ipſius $ac$, & $um - mi$, valoribus, erit $[p + \frac{pp}{8nn}] \times \frac{aa}{\sqrt{ax}}$; $+ [p + \frac{pp}{8nn}] \times [\frac{aa}{\sqrt{ax}} - \frac{x}{2x}\sqrt{\frac{aa}{x}}; - \frac{aaps}{4nx\sqrt{ax}}]$ æquale Minimo.

Hac autem Æquatione, more communi, conſcripta, ſublatiſque Productis quibuſdam datis, iis videlicet, in quibus non occurrit incognita $u$, fit,

$\frac{ppaa}{8nn\sqrt{ax}}; -\frac{aapps}{4nx\sqrt{ax}}; +\frac{aapp}{8nn\sqrt{ax}} - \frac{ppx}{16nnx}\sqrt{\frac{aa}{x}} - \frac{aapaa}{16nnx\sqrt{ax}} = M.$

Jactis Termino primo & tertio in eandem Summam, ductaque Æquatione in $\frac{4VAx}{aapp}$, fit $\frac{p}{uu} - \frac{s}{ux} - \frac{p\dot{x}}{4uux}$ $*$ $- \frac{ppt}{8u^3x}$ $*$ $= M$.

Tollendo Terminum tertium quartumque, utpote cæteris infinite minores, & reliquos more Minimi tractando, fit

$- \frac{2p\dot{u}}{u^3} + \frac{s\dot{u}}{uux} = 0$; unde prodit $u = \frac{2px}{s}$; quæ ipsissima est Solutio, quam priori Calculo, eoque elegantiori, inveneram.

Neque dubium moveas utrum Arcus circularis, ab A ad E ductus, cui describendo minimum Temporis impendatur, perpendicularem H F, in eodem Puncto G, secet, in quo concurrunt Rectæ æquales A G, G E, quæ minimo Tempore itidem describantur, inter innumeras ejusmodi Rectas. Quippe, propter parallelas ad sensum inter se Lineas omnes, in Arcu infinite parvo A G E, subtensas; si, quo Calculo usi sumus, ad inveniendas, loco ipsius A E, Rectas A G, G E, eodem utamur ad inveniendas, loco Subtensæ cujusvis alterius, verbi gratia A G, S T &c, Rectas novas A N, N G; S Z, Z T &c, & sic in infinitum; decrescentibus hac ratione continuo Subtensis omnibus, evadent illæ tandem in ipsissimum Arcum A G E.

Invenio inter Chartas meas, ante Annum unum vel alterum conscriptas, me ipsissimam Ideam habuisse, quam Cl. Jo. Bernoullius secutus est, in Inventione Curvæ Brevissimi Descensus, juxta Fermatii Doctrinam Refractionum. Calculum ipsum tamen non institueram, quamvis facillimum. Sed ex illa Theoria videbam Tangentem Curvæ Brevissimi Descensus statim ubique dari. Quod ad Solutionem sufficere constat.

IN

# INVESTIGATIO GEOMETRICA SOLIDI ROTUNDI, IN QUOD MINIMA FIAT RESISTENTIA.

QUoniam noſtras, de Linea Breviſſimi Deſcenſus, Diſquiſitiones ſerius inſtituimus, Solidum etiam Rotundum, in quod minima oriatur Reſiſtentia, quamvis magis arduæ Diſquiſitionis, determinare placet. Certe nulla adhuc, me quidem conſcio, extat de illo Demonſtratio; nec a quoquam ſolutum intellexi hocce Problema, præter ipſum Newtonum. Cujus etiam Conſtructio talis eſt, ut, Solutionem quærenti, lucem nullam præferat. Fruſtra Cl. Hugenius iſtud Problema, Annis 1690 & 1691, me Hagæ Comitis tunc commorante, aggreſſus eſt.

Sit P T Axis Solidi Rotundi, quod a P verſus T moveri oporteat, minima proveniente Reſiſtentia. Sint A, E duo Puncta, in Solidi quæſiti Superficie, inter ſe proxima, ac in eodem cum Axe P T Plano poſita; quorum ſit E ab Axe remotius. Jungatur Linea E A, quæ producta Axem ſecet in T; atque Rectæ E A, ab ejus Puncto medio F, erigatur Perpendicularis G F P, Axi occurrens in P. Quæritur Poſitio Rectarum æqualium E G, G A, ex quarum Revolutione, circa Axem P T, orta Superficies minimam patiatur Reſiſtentiam. *Fig.* II.

* Centro

* *Fig.* III. * Centro C, Radio quocunque C D, ad P T parallelo, qui Reſiſtentiæ perpendicularis Modus ſtatuatur, deſcribatur Circumferentiæ Circuli Quadrans D G X; eritque Recta C X ad C D perpendicularis. A Puncto † *Fig.* II. † B, ducatur, ad Axem P T Perpendicularis, B B. Sintque Anguli recti B B T, X C D, in utraque Figura, ad * *Fig.* III. eandem Plagam obverſi. * Axe C D, Vertice D, Parametro C D, deſcribatur Parabola D L Z N X. Sumpto in Quadrante D G X Puncto quolibet G, ductaque ipſi C D parallela G Z O, quæ Parabolæ occurrat in Z, Rectæ vero C X in O, erit Z O Modus, ſeu Menſura, Reſiſtentiæ, ad illam Obliquitatem, quam præ ſe fert Quadrantis Circumferentia, in Puncto G. Sit jam Tan- † *Fig.* II. gens, in Puncto G, ad Rectam B A, † parallela.

* *Fig.* III. A Puncto G * capiantur utrinque, in Quadrante X D, æquales Arcus G A, G B, ea ratione, ut ſint Anguli B G A, B G A, in ambabus Figuris, inter ſe æquales; & Puncta B, G, A; B, G, A ſimili ordine poſita.

* *Fig.* III. * Arcuum B G, G A ſignentur media Puncta T, R; & ab his ducantur, ad C D Parallelæ, T N M, R L K; quarum illa Parabolæ & Rectæ C X occurrat, in Punctis N & M; hæc vero iiſdem occurrat, in Punctis L & K. Erit itaque M N Menſura Reſiſtentiæ, ad Obliquitatem ipſarum B G, B G; & K L Menſura Reſiſtentiæ, ad Obliquitatem ipſarum G A, G A.

† *Fig.* II. † Sit A F vel F B $= p$. Radius Arcus A G B $= u$. Erit itaque F G $= \frac{p-t}{2n}$. Ducatur ad Axem P T Perpendicularis A S. Et ad hanc ducantur Perpendiculares B R, G $g$, F $u$; voceturque ipſa F $u$, $s$; ipſa autem A $u$, $t$. Jam ut A F ($p$) ad F $u$ ($s$) ita F G ($\frac{p-t}{2n}$) ad $g$ $u$, * *Fig.* III. quæ erit $\frac{p-t}{2n}$. Denique ſit A S æqualis $x$, C D vero * æqualis $r$.

Erit igitur $[x + \frac{1}{2}t + \frac{p-t}{4n}] \times [t + \frac{p-t}{2n}] \times$ K L; $+ [x + \frac{3}{2}t + \frac{p-t}{4n}] \times [t - \frac{p-t}{2n}] \times$ M N $=$ Minimo.

Jam ut Radius $u$ ad Radium $r$ ita eſt $p$ ad $\frac{pr}{u}$; quæ æquatur ipſi A F, in Figura III.

Item

Item ut $p$ ad $s$ ita eſt $r$ ad $\frac{r-s}{p}$; quæ æquatur ipſi C O, vel Z Y; Ductæ ſcilicet a Puncto Z, ad Angulos rectos, ad Lineam C D. Eritque proinde Y D $= \frac{r-s}{pp}$.

Per Punctum G ducatur Arcum B G A contingens Recta G I; ſitque A I ad G I Perpendicularis. Denique ſint R Q, T S ad G I Perpendiculares.

Ex his colligitur A I $= \frac{pqr}{2nn}$; & R Q ſive T S $= \frac{p-pr}{8nn}$; & G Q ſive G S $= \frac{p-r}{2n}$.

Ducatur Q $\alpha$ ad C D parallela & G $\alpha$ ad Q $\alpha$ perpendicularis.

Ut igitur $p$ ad $t$ ita eſt G Q $(\frac{p-r}{2n})$ ad G $\alpha = \frac{t-r}{2n}$.

Sit R $\beta$ ad Q $\alpha$ perpendicularis. Ergo ut $p$ ad $s$ ita eſt R Q $(\frac{pqr}{8nn})$ ad R $\beta = \frac{pqs}{8nn}$.

Sit L $\gamma$ ad C D perpendicularis. Erit $r - \frac{L\gamma Q}{r} =$ K L. Id eſt

$$r - \left[+\tfrac{r-s}{p} - \tfrac{t-r}{2n} - \tfrac{pqs}{8nn}\right]^2 \times \tfrac{1}{r} = \text{K L}.$$

Sit N $\delta$ ad C D perpendicularis. Erit $r - \frac{N\delta\Pi}{r} =$ M N. Id eſt

$$r - \left[+\tfrac{r-s}{p} + \tfrac{t-r}{2n} - \tfrac{pqs}{8nn}\right]^2 \times \tfrac{1}{r} = \text{M N}$$ Itaque erit

$$r - \tfrac{rss}{pp} + \tfrac{tsr}{pn} - \tfrac{tsp}{4nn} + \tfrac{rss}{4nn} - \tfrac{pqrss}{8n^3} - \tfrac{ppqrss}{64n^4} = \text{K L}.$$

Sit hoc $=$ A $-$ B $+$ C $-$ D $+$ E $-$ F $-$ G.

Item $r - \frac{rss}{pp} - \frac{tsr}{pn} - \frac{tsp}{4nn} + \frac{rss}{4nn} + \frac{pqrss}{8n^3} - \frac{ppqrss}{64n^4} =$ M N, quæ proinde $=$ A $-$ B $-$ C $-$ D $+$ E $+$ F $-$ G.

Sed eſt $[tx + \frac{1}{2}tt + \frac{pss}{4n}; + \frac{pqx}{2n} + \frac{pqs}{4n} + \frac{ppqss}{8nn}] \times$ K L ; $+ [tx + \frac{1}{2}tt + \frac{pss}{4n}; - \frac{pqx}{2n} - \frac{3pqs}{4n} - \frac{ppqss}{8nn}] \times$ M N æquale Minimo.

Sit hoc $[\alpha + \beta * + \gamma + \delta + \varepsilon] \times$ K L ; $+ [\alpha + 3\beta * - \gamma - \delta - \varepsilon] \times$ M N $=$ M.

Ipſius autem $\delta$ valor eſt $\frac{pss}{2n}$.

Prodit itaque

$$\left[\begin{array}{l}
\alpha\,\text{A} - \alpha\,\text{B} + \alpha\,\text{C} - \alpha\,\text{D} + \alpha\,\text{E} - \alpha\,\text{F} - \alpha\,\text{G} \\
+\beta\,\text{A} - \beta\,\text{B} + \beta\,\text{C} - \beta\,\text{D} + \beta\,\text{E} - \beta\,\text{F} - \beta\,\text{G} \\
+\gamma\,\text{A} - \gamma\,\text{B} + \gamma\,\text{C} - \gamma\,\text{D} + \gamma\,\text{E} - \gamma\,\text{F} - \gamma\,\text{G} \\
+\delta\,\text{A} - \delta\,\text{B} + \delta\,\text{C} - \delta\,\text{D} + \delta\,\text{E} - \delta\,\text{F} - \delta\,\text{G} \\
+\varepsilon\,\text{A} - \varepsilon\,\text{B} + \varepsilon\,\text{C} - \varepsilon\,\text{D} + \varepsilon\,\text{E} - \varepsilon\,\text{F} - \varepsilon\,\text{G}.
\end{array}\right]$$

+

$$+\left[\begin{array}{l} \alpha A - \alpha B - \alpha C - \alpha D + \alpha E + \alpha F - \alpha G \\ +3\beta A - 3\beta B - 3\beta C - 3\beta D + 3\beta E + 3\beta F - 3\beta G \\ -\gamma A + \gamma B + \gamma C + \gamma D - \gamma E - \gamma F + \gamma G \\ -\delta A + \delta B + \delta C + \delta D - \delta E - \delta F + \delta G \\ -\varepsilon A + \varepsilon B + \varepsilon C + \varepsilon D - \varepsilon E - \varepsilon F + \varepsilon G \end{array}\right] = M.$$

Id eſt

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha A - 2\alpha B \qquad\qquad - 2\alpha D + 2\alpha E \qquad\qquad - 2\alpha G \\ +4\beta A - 4\beta B - 2\beta C - 4\beta D + 4\beta E + 2\beta F - 4\beta G \\ \qquad\qquad + 2\gamma C \qquad\qquad\qquad - 2\gamma F \\ \qquad\qquad + 2\delta C \qquad\qquad\qquad - 2\delta F \\ \qquad\qquad + 2\varepsilon C \qquad\qquad\qquad - 2\varepsilon F \end{array}\right]$$

$$= M = \left[\begin{array}{l} 2rtx - \frac{2trssx}{pp} \qquad\qquad - \frac{t3rx}{2nn} + \frac{rtssx}{2nn} \qquad\qquad - \frac{pprsstx}{32n4} \\ +2ttr - \frac{2ttrss}{pp} - \frac{t3rs}{pn} - \frac{t4r}{2nn} + \frac{rsstt}{2nn} + \frac{prst3}{8n3} - \frac{pprsstt}{32n4} \\ \qquad\qquad + \frac{trssx}{nn} \qquad\qquad\qquad - \frac{pprsstx}{8n4} \\ \qquad\qquad + \frac{rsstt}{nn} \qquad\qquad\qquad - \frac{pprsstt}{8n4} \\ \qquad\qquad + \frac{pts3r}{4n3} \qquad\qquad\qquad - \frac{p3rs^3t}{32n5} \end{array}\right]$$

Ex his octodecim Terminis, tollantur jam Termini cogniti, id eſt Termini, in quibus quantitas $u$ non reperitur. Tales ſunt primus, ſecundus, ſextus, ſeptimus. Tollantur iterum, ex remanentibus Terminis, quicunque ſunt cæteris infinite minores. Tales ſunt quintus, nonus, decimus, undecimus, duodecimus, decimus quartus, decimus quintus, decimus ſextus, decimus ſeptimus, decimus octavus. Remanent itaque Termini tertius, quartus, octavus, atque decimus tertius. His autem per $tr$ diviſis; prodit $-\frac{tts}{pn} - \frac{ttx}{2nn} + \frac{3ssx}{2nn} = M$.

Hinc erit $\frac{tts\dot{u}}{pnn} + \frac{ttx\dot{u}}{n^3} - \frac{3ssx\dot{u}}{n^3} = 0$; ac proinde $u = \frac{3psx}{tt} - \frac{px}{s}$.

Talis itaque oritur Conſtructio, eaque ad Uſum Mechanicum accommodatiſſima. Occurrat * Recta E A Axi P T, ut dictum eſt, in T; ac conveniant Puncta E A in ipſo Puncto A. Sitque Angulus A T P 60 Gradibus minor. Sumatur S Y æqualis 3 S T; ſitque Punctum S, inter Puncta T & Y, poſitum. Itaque & Punctum P, in-

* *Fig.* IV.

inter Puncta S & Y, interjacebit. Et ducta Y Z ad P T perpendiculari, donec Lineæ A P occurrat in Z, erit P Z Radius Curvitatis in A. Quippe P A producta, donec ipsi T V, ad P T perpendiculari, occurrat in V, fit $AV = \frac{psx}{tt}$; ac proinde $AZ = \frac{3psx}{tt}$. Sed $AP = \frac{px}{s}$. Itaque $PZ = \frac{3psx}{tt} - \frac{px}{s}$.

Alias sit S Y æqualis 3 S T. Sumatur $SI = PY$; sintque Puncta Y, I ad eandem partem Punctorum P, S; & a Puncto I ducta Linea I C ad P T perpendiculari, quæ occurrat ipsi A P in C, erit C Centrum Curvitatis in A, quandiu Punctum istud C ad concavam Curvæ partem positum est.

Si ad Praxin revocetur Curva nostra, sit † A E C Axis Solidi, A ejus Vertex; sit A D B ad Axem A C perpendicularis. Incipiatur Curva nostra D F G H describi, a quocunque volueris Puncto D, in perpendiculari A D B sumpto; dummodo extra Axem Solidi positum sit. Sitque, eo loco, Curvæ, ad Axem Solidi, Inclinatio Graduum 45. Itaque, descripta Curva D F G H, sit A E Solidi propositi Longitudo; E L, ipsi A E perpendicularis, ejusdem Solidi dimidia Latitudo. Ducatur Recta L F A, Curvæ D F G H occurrens in F; & fiat, ut A F ad A L sic A D ad D B. Curva nova B L, priori D F similis, a Puncto B incipiens, dabit Solidi quæsiti dimidiam Sectionem A B L E. *Fig.* V.

Si Curva D L Z N X, Figuræ III, non esset Parabola, sed alia quævis Curva, cujus Elementa dentur, ita ut Resistentia, in obliquam Superficiem, aliam quamcunque rationem habeat, ad Resistentiam perpendicularem, eodem modo procedet Solutio.

Reliquum erat ut Cl. Newtoni Solutionem, aliquanto perplexiorem, cum nostra, eaque simpliciori, conferremus, ut utramque veram esse pateret. Facto autem examine, inveni eandemmet nobis prodire Curvam. Sed nil mirum si Vir Summus, ac pluribus momenti majoris intentus, non sollicitus fuerit de reducenda, ad simpliciorem formam, Constructione, quam ejus Calculus ipsi suppeditaverat. In quo ipsum se-

quemur, nec ulteriorem ea, quam nacti ſumus, Simplicitatem ſectabimur.

Conſenſus itaque cum Newtono, pluribus, quam opus eſſet, Indiciis, patuit. Nam & Æquatio Newtoniana, & hujus Æquationis Fluxio, Terminis noſtris expreſſæ, veræ inveniuntur; & Curvæ Newtonianæ Radius idem prodit, cum Radio Curvæ noſtræ.

Quæret forſan Cl. Leibnitius, unde mihi cognitus ſit iſte Calculus, quo utor? Ejus equidem Fundamenta univerſa, ac pleraſque Regulas, proprio Marte, Anno 1687, circa Menſem Aprilem & ſequentes, aliiſque deinceps Annis, inveni; quo tempore neminem eo Calculi genere, præter me ipſum, uti putabam. Nec mihi minus cognitus foret, ſi nondum natus eſſet Leibnitius. Aliis itaque glorietur Diſcipulis, me certe non poteſt. Quod plus ſatis patebit, ſi olim Litteræ, quæ, inter Clariſſimum Hugenium meque, interceſſerunt, publici juris fiant. Newtonum tamen primum, ac pluribus Annis vetuſtiſſimum, hujus Calculi Inventorem, ipſa rerum evidentia coactus, agnoſco: a quo utrum quicquam mutuatus ſit Leibnitius, ſecundus ejus Inventor, malo eorum, quam meum, ſit Judicium, quibus viſæ fuerint Newtoni Litteræ, aliique ejuſdem Manuſcripti Codices. Neque modeſtioris Newtoni Silentium, aut prona Leibnitii Sedulitas, Inventionem hujus Calculi ſibi paſſim tribuentis, ullis imponet, qui ea pertractarint, quæ ipſe evolvi, Inſtrumenta.

Jam vero, ſi meas ipſius Meditationes, æquiori Lance, inter ſe comparandi, mihi concedatur facultas; ne vel mille ejuſmodi Problematum Solutiones, uni noſtræ Theoriæ Gravitatis, opponendas pronunciem. Quam equidem brevi publici juris facerem, quamvis chartulæ meæ, ante Annos novem conſcriptæ, jam non ſint ad manus, ſi mihi propoſitum eſſet ulterius recognoſcere, quo ſe jure SOLOS Mathematicos proclament Germani Geometræ. Certe Newtono, Summo Viro, primam Palmam, abſque omni diſputatione aut invidia, immenſo fere intervallo, præripiente; de ſecunda, in

Phy-

Phyſicis ac Mathematicis rebus, plures, quam arbitrentur, invenient, neque forſan iniquis uſqueadeo viribus, cum ipſis decertantes.

Agedum, quid jam de illa dicendum eſt Ordinis atque Exiſtimationis, e Solio veluti Mathematico, ſingulis Geometris Diſtributione? Sed ignoſcendum Viro, ſi minus de me aliiſque, ſaltem de Mathematicis rebus optime merito. Aliis dico; qua enim æquitate, ut cæteros taceam, Lineæ Breviſſimi Deſcenſus Inventio, ſubtilis quidem illa & egregia, opponatur eximiis illis Theorematis, uſus prorſus infiniti, quæ Dnus *de Moyvre*, in Tranſactionibus Philoſophicis, communicavit?

POSTQUAM hæc eſſent conſcripta, brevis Otii Spatium nactus, determinare aggreſſus ſum Curvæ * B L Deſcriptionem: Cujus quot volueris Puncta invenies, vel ex Tabulis Logarithmorum, invento ſcilicet ad Numerum datum Logarithmo; vel ex Hyperbolicæ Areæ Quadratura. Atque, ad inventa quælibet hujuſmodi Puncta, dabitur tum Curvæ Tangens, tum Radius Curvaturæ. * *Fig.* V.

Sit A E Abſciſſa ($x$): E L ad A E perpendicularis Ordinata ($y$): B T Parallela ad Curvæ Tangentem in L: Punctum T Axis E A & Rectæ B T communis Interſectio. Sumatur A T ($z$) ad libitum; quæ tamen major ſit quam A B: poſitaque A B æquali $a$, erit E L ſeu $y = \frac{a^4}{4z^3} + \frac{1}{2}z + \frac{z^3}{4a^4}$. Invenietur autem E L facillime, ſi producta I K, ipſam B T ad Angulos rectos biſecante in I, donec ipſi B A occurrat in K, fiat ut A T ad B K ſic B K ad E L: Quod eodem cum Conſtructione Newtoniana redit. Rurſus erit $x = \frac{1}{4}zz + \frac{3z^4}{16} - u - q$.

Quantitas $q$ data eſt, æqualis nempe $\frac{7}{16}a$. Itaque, poſito $a$ æquali 1, erit $q$ æqualis 0,4375.

Quantitas $u$ eſt Integralis Quantitas, orta ex Termino Analytico $\frac{z^3}{4a^2}$. Cognoſcetur autem $u$, vel per Quadraturam Spatii Hyperbolici, vel per Inventionem Logarithmi ad Numerum datum $z$. Cum autem Logarithmi

mi jam inventi ſint, ad ejuſmodi Numeros $z$, quos pro arbitrio eligere poſſimus, malumus Logarithmis uti, quam Hyperbola : præſertim dum in Arithmetica Tabula conſtruenda verſamur. Itaque ipſius $\frac{z^3}{4x}$ Integralem Quantitatem ſic invenio. Intelligatur B M æqualis ipſi A B; ſitque Angulus A B M rectus. Per Punctum M, Aſſymptoto B A, ducatur Logarithmica Linea M O; cujus Tangens in M ſecet Aſſymptotum A B, in Puncto, quod ab ipſo B diſtet, intervallo æquali $\frac{1}{4}a$. Producta igitur B M, ut occurrat, in S, ipſi T O, ad Axem E A perpendiculari, erit S O æqualis $u$. Erit enim $\dot{z}$ ad $\dot{u}$ ut $z$ ad $\frac{1}{4}a$. Ipſius autem $u$ initium, in Linea B S, ſumendum eſſe, nulla Quantitate data vel addita vel detracta, patet, ex Proceſſu pleniori Demonſtrationis, quem omitto. Cujus tamen, in gratiam Tyronum, addam Fundamentum.

Deſcribatur Curva M V, talis naturæ, ut, ducta V Q ad A B perpendiculari, ſit ſemper A Q $= y$; Q V $= z$. Ducatur M R, ipſi A B parallela : ſitque Punctum R rectarum M R, Q V communis Interſectio. Hinc oſtenditur facile eſſe $y$ ad $x$, ut Rectangulum A Q R ad Aream Q B M V : quæ Area ſi per Methodum Fluxionum inquiratur, & dividatur per $a$, prodit ipſius $x$ longitudo, qualis a nobis determinata eſt.

Poſito quod Reſiſtentia perpendicularis exprimatur per Aream ipſam, in quam fit Reſiſtentia, ductam in Quantitatem $a$, vel ipſam Unitatem ; erit Reſiſtentia in Baſin orta, ubi Solidum movetur retrorſum, data cum Velocitate, $[\frac{1}{8}\frac{1}{zz} + \frac{1}{2} + \frac{3zz}{4} + \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{8}] \times \frac{c}{4r}$ ; poſitis ſcilicet $r$ & $c$ pro Circuli cujuſcunque Radio & Circumferentia. Reſiſtentia autem in anteriorem Partem, ubi Solidum movetur antrorſum, eadem cum Velocitate, erit ex Fluxionum Doctrina, $[u + \frac{1}{8}\frac{1}{zz} + \frac{5zz}{8} + \frac{3z^4}{16} + \frac{17}{16}] \times \frac{c}{4r}$.

Inſtituto itaque facili Calculo, Tabulam ſequentem conſtruximus ; cujus ope Curvam quæſitam & ipſi deſcripſimus accurate, in ampliori Charta ; & alii, quibus ita viſum fuerit, deſcribere poterunt.

A B

| A T = z | B L = y & A E = x | | S O = u |
|---|---|---|---|
| | A B = 1 | | |
| 1 | 1.<br>0. | y<br>u | 0. |
| 2 | 3,125.<br>3,388211 | y<br>x | 0,174287 |
| 3 | 8,333333<br>16,725347 | y<br>x | 0,274653 |
| 4 | 18,0625.<br>51,215927 | y<br>x | 0,346573 |
| 5 | 33,8.<br>124,597641 | y<br>x | 0,402359 |
| 6 | 57,041667<br>251,114560 | y<br>x | 0,447949 |
| 7 | 89,285714<br>461,513523 | y<br>x | 0,486477 |
| 8 | 132,03125.<br>683,042630 | y<br>x | 0,519870 |
| 9 | 186,777778<br>1247,450694 | y<br>x | 0,549306 |
| 10 | 255,025.<br>1898,986654 | y<br>x | 0,575646 |
| 15 | 851,266667<br>9547,122987 | y<br>x | 0,677013 |
| 20 | 2010,0125.<br>30098,812567 | y<br>x | 0,749933 |
| 25 | 3918,76.<br>64312,195281 | y<br>x | 0,804719 |
| 30 | 6765,008333<br>1,52098,712201 | y<br>x | 0,850299 |
| 40 | 16020,0625.<br>4,80198,640281 | y<br>x | 0,922219 |
| 50 | 31275,1005<br>11,72498,584495 | y<br>x | 0,978005 |
| 60 | 54030,004167<br>24,20898,538914 | y<br>x | 1,023386 |
| 70 | 85785,003571<br>45,01098,500377 | y<br>x | 1,062123 |
| 80 | 1,28040,003125<br>76 81598,466934 | y<br>x | 1,095516 |
| 90 | 1,82295,002778<br>123,03898,437548 | y<br>x | 1,124952 |
| 100 | 2,50050,0025.<br>187,52498,411208 | y<br>x | 1,151292 |
| 200 | 20,00100,00125.<br>3000 00998,236921 | y<br>x | 1,325579 |
| 300 | 67,50150,000833<br>15187,72498,136555 | y<br>x | 1,425945 |
| 500 | 312,50250,0005.<br>1 17188,12498,0088 49 | y<br>x | 1,553651 |
| 1000 | 2500,00500,00025.<br>18,75002,49997,835562 | y<br>x | 1,726938 |
| 1500 | 8437,50750,000167<br>94,92193,12497,734195 | y<br>x | 1,828305 |
| 2000 | 20000,01000,000125<br>300,00009,99997,661275 | y<br>x | 1,901225 |
| 3000 | 67500,01500,000083<br>1518,75022,49997,560959 | y<br>x | 2,001591 |
| 5000 | 3,12500,02500,00005.<br>11718,75062,49997,433201 | y<br>x | 2,129297 |
| 7000 | 8,57500,03500,000036<br>45018,75122,49997,349085 | y<br>x | 2,213415 |
| 10000 | 25,00000,05000,00002 5.<br>1.87500,00249 99997,259916 | y<br>x | 3,302584 |

Quam-

Quamvis autem iſta Curva, quibuſdam Erroribus, in Navium Conſtructione, vitandis, inſervire poſſit; tamen aliam omnino Figuram adhiberi oportere mihi compertum eſt. Sed hæc ulterius proſequi non eſt Animus. Sufficiat dixiſſe multa adhuc Vulgo incognita remanere; quibus, ſi in apertum prodirent, ipſa Rei Nauticæ facies plurimum mutaretur, magno Regionum quarundam commodo, maximoque periculo aliarum; quas tamen ſalvas precamur.

HACTENUS fere cum Summis Mathematicis expoſtulatum eſt, coacto nobis invitoque prorſus Animo. Quippe quos libens tum honore ſummo proſequar, tum agnoſcam, Newtono primas tenente, ſuo peculiari jure, cum paucis admodum Geometris, in primo ordine, ipſaque in fronte verſari. Sed tamdiu me detinuerunt Typothetarum moræ, ut etiam Dnus S. Inveſtigationis Lineæ Breviſſimi Deſcenſus, in publicum emittendæ, Spatium nactus, eandem fere mecum cauſam tractarit.

*Vide Philoſ. Tranſact. N.* 246.

At, infœliciſſimo eventu, ſummæ laudis æmulus Geometra difficillimum Problema præmature aggreſſus eſt. Quem utinam, utpote hoc tempore laudatis Viris nimium quantum imparem, res ipſa non requireret hic a me errorum ſuorum moneri. Quod libenti gratoque Animo acceptum feret, ſi ſecum reputet quanto cum felle, quantaque cum indignatione, potuiſſet ab aliis excipi. Nec enim patiuntur Geometræ ſuam contaminari Matheſin.

Duplex autem eſt errorum Ejus ſcaturigo. Primo quod ſupponat Tempus per Rectam AE * eſſe Minimum, ac æquale Tempori per Arcum quæſitum AGE. Secundo quod ex hoc ſe Principio deducere credat Arcum AGE ad Cycloïdem pertinere. Nam neque Tempus per Rectam AE Minimum eſt; neque Arcus AGE, poſitis Temporibus per Rectam AE & Arcum AGE æqua-

*Fig.* I.

æqualibus, in Cycloïde noſtra conſtitutus eſt, ſed totus extra illam cadit: ejuſque Centrum in ipſa Horizontali L H poſitum eſt. Unde oporteret Dnum S. arguiſſe, Lineam Breviſſimi Deſcenſus eſſe, non Cycloïdem, ſed Semi-Circulum.

Fateor equidem, neglectis ſecundis Fluxionibus, quæ nullatenus erant negligendæ, Tempora per Rectam A E, & per Arcum quemcunque A G E, eſſe æqualia; ſi Arcus ille deſcriptus ſit Radio non infinite parvo. Sed hoc neminem ad Cycloïdem, potius quam ad infinitas alias Curvas, deduxerit. Imo ipſum Problema Bernoullianum eo redit, ut inveniatur quis demum, inter infinitos Arcus, per Puncta A & E ductos (eoſque, ſi ſecundas Fluxiones neglexeris, omnes inter ſe æquales) minimo deſcribatur Temporis Spatio.

Transferantur Puncta A, F, E, G in Sextam Figuram; & producatur F G in N: ductaque a Puncto G Linea G I, ad F G perpendiculari; quæ G I exprimat Tempus per A G E; exprimant eadem ratione Ordinatæ F K, N L, ad G I parallelæ, Tempora per A F E, & Arcum A N E. Denique moto Puncto N, per Lineam F G, deſcribat Ordinatæ N L Punctum extremum L Curvam L I K. In illa Curva erit G I minima, ubi Punctum G in Cycloïdem noſtram incidit. Hinc Puncta K, L, recedent utrinque paulatim a Recta F N; &, poſita K L ad F N parallela & æquali, Tempus per cognatum Arcum A N E æquabitur Tempori per Rectam A F E. Quantum autem iſte Arcus A N E differat ab Arcu Cycloïdali A G E, vel Tyro videat, Si tamen Dnus S. mitiori Animadverſione non contentus, pleniorem mereri ſuſtinuerit, demonſtrabimus, vel pro nobis alii, non tam ipſi, qui noſtra forſan nondum capiet, quam Orbi Mathematico, quis ſit Arcus ille A N E, qui eodem Tempore cum Recta A E deſcribatur, quantaque ab Arcu Cycloïdis A G E differentia diſtet. Sunt ſcilicet Lineæ F G, G N inter ſe æquales. Quod equidem ita eſſe tum nullus ambigebam; tum etiam, inſtituta accuratiori Arcus A N E Inveſtigatione, demonſtravi. *Fig.* VI.

Ex

Ex præmiſſis manifeſtum eſt Dnum S. ſi per devia prorſus & abrupta loca non excurriſſet, Demonſtrationis tamen, non vero Inveſtigationis, Titulum Scripto ſuo apponere debuiſſe. At vero, ut jam ſe res habet, neutram Vocem uſurpaſſe ipſi licitum eſt. Laudandus tamen eſt Animi, ad ardua ſemet efferre adlaborantis, conatus. Quem olim fœlicior fortaſſis eventus, præſertim in Diſquiſitionibus minus perplexis, excipiet.

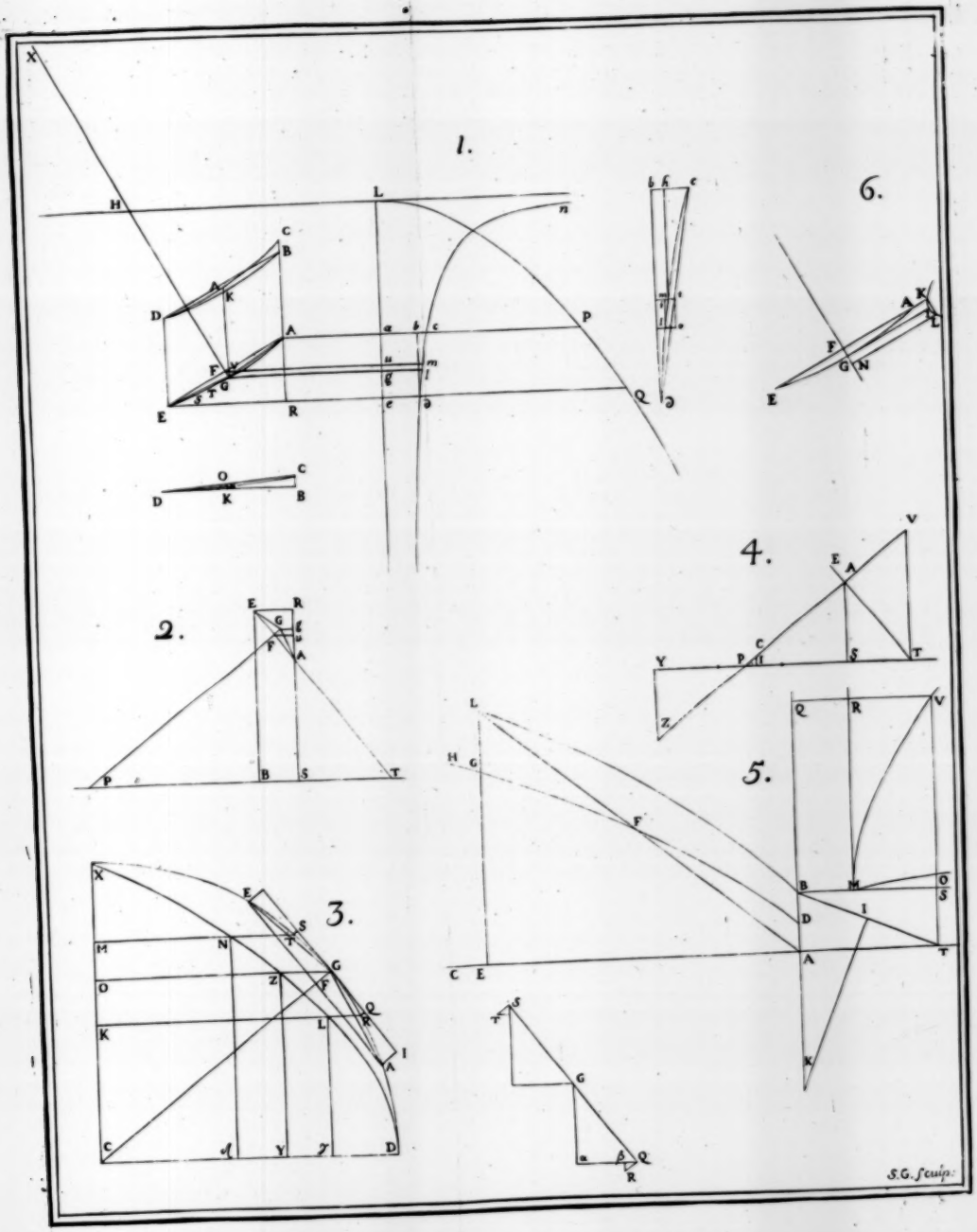
---

FINIS.

---

CORRIGENDA.

PAG. 8. l. 9. *Verba* [patetque proinde Inventione Lineolæ *m t*, ſeu Curvitatis Lineolæ *c m d* opus non fore] *tranſferantur ad finem Paragraphi.* p. 10. l. 29. hoc. p. 12. l. 28. inſtitueram totum, quamvis.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
S.G. Sculp.